Sur les espaces de Banach dits “ mesurés ” -ou non ?

Claire David

Sur les espaces de Banach dits « mesurés » - ou non ?

Claire David

5 juin 2016

Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06
CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu 75005, Paris, France

Ce texte fait suite à une question fort intéressante d'Alexandre DELYON.

On s'intéresse, dans ce qui suit, aux espaces de fonctions mesurables, de Banach, où la norme d'une fonction est reliée, **DIRECTEMENT**, à une mesure de cette même fonction. C. Bennett et R. Sharpley [1] qualifient ces espaces de « Banach function spaces ». Il ne semble pas exister de terminologie française équivalente dans la littérature.

Les espaces de Lebesgue sont des exemples classiques et naturels de tels espaces, il y a aussi les espaces de Lorentz, et les espaces d'Orlicz. Mais quels espaces de Banach fonctionnels ne possèdent pas de norme directement reliée à une mesure ? C'est une question que l'on peut légitimement se poser.

1 Préliminaires

Le caractère complet des espaces de Banach fonctionnels présentés par C. Bennett et R. Sharpley [1] vient du Lemme de Fatou, et, plus précisément, de la caractérisation des espaces complets par l'intermédiaire de séries :

Théorème 1.1. *Un espace vectoriel normé E est un espace de Banach, si et seulement si toute série absolument convergente de cet espace est convergente.*

Démonstration. Dans un espace complet, toute série absolument convergente converge, puisque la suite de ses sommes partielles est une suite de Cauchy. Réciproquement, si l'on suppose que toute série absolument convergente d'un espace E est convergente alors, pour toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de considérer la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n :

$$\left|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

La série de terme général $u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)}$ est ainsi absolument convergente, et donc convergente. Commme, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)}\right) = u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(0)}$$

on en déduit la convergence de la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une valeur d'adhérence, elle est donc convergente. L'espace E est complet.

$\square$

Définition 1.1. Espace de Banach mesuré [1]

Etant donné un espace mesuré (Ω,μ), et une norme ρ sur Ω, on appelle *espace de Banach mesuré* l'ensemble de toutes les fonctions f, à valeurs réelles ou complexes, mesurables (pour la mesure μ), μ-finies presque partout, telles que :

$$\rho(|f|) < +\infty$$

2 Quelques exemples d'espaces de Banach fonctionnels non directement liés à une mesure

2.1 Les espaces de Besov

Rappels sur la décomposition dyadique

On se place, dans ce qui suit, dans l'espace $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la couronne :

$$\left\{\xi \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{3}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\right\}$$

On introduit deux fonctions radiales, à valeurs dans $[0,1]$, appartenant respectivement à $\mathcal{D}\left(B\left(O,\frac{4}{3}\right)\right)$ and $\mathcal{D}(\mathcal{C})$, χ et ϕ, telles que :

$$\forall\,\xi \in \mathbb{R}^d : \quad \chi(\xi) + \sum_{j\geqslant 0} \phi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1$$

$$\forall\,\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1$$

Si on désigne par $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d$, et par $\mathcal{F}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse, on introduit :

$$h = \mathcal{F}^{-1}\phi \quad \text{et} \quad \tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi$$

Les blocs dyadiques non homogènes Δ_j sont définis, pour tout u de l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, dual de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par :

$$\Delta_j\, u = 0 \quad si \quad j \leqslant -2$$

$$\Delta_{-1}\, u = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{h}(y)\, u(x-y)\, dy$$

$$\Delta_j\, u = 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} h(2^j\, y)\, u(x-y)\, dy \quad si \quad j \geqslant 0$$

Les blocs dyadiques homogènes $\dot{\Delta}_j$ sont définis, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et tout u de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, par :

$$\dot{\Delta}_j\, u = 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} h(2^j\, y)\, u(x-y)\, dy$$

Définition 2.1. Décomposition de Littlewood Paley [2]

$$Id = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j \quad , \quad Id = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j$$

Remarque 2.1. La décomposition dyadique est indépendante du choix de ϕ et χ.

Définition 2.2. Espace de Besov homogène [2]

Soient p, q tels que : $1 \leqslant p < +\infty$, $1 \leqslant q < +\infty$, et $s > 0$.

L'espace de Besov homogène $B^0_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ est défini comme l'ensemble des distributions u telles que :

$$\|u\|_{B^0_{p,q}(\mathbb{R}^d)} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j\,q\,s}\, \|\dot{\Delta}_j\, u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

Théorème 2.1. *[2]*

L'espace de Besov homogène $B^0_{p,q}(\Omega)$*, muni de la norme*

$$\|\cdot\|_{B^0_{p,q}(K)} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j\,q\,s}\, \|\dot{\Delta}_j\ \cdot\|^q_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

est un espace de Banach.

Ainsi, l'espace de Besov homogène $B^0_{p,q}(\mathbb{R}^d a)$ est un espace de Banach dont la norme n'est pas directement liée à une mesure, puisqu'elle est définie à l'aide de la somme d'une série. On pourra objecter qu'il existe quand même un lien sous-jacent, puisque les termes

$$\|\dot{\Delta}_j\ \cdot\|^q_{L^p(\Omega)}$$

font intervenir la mesure de Lebesgue.

Remarque 2.2. Les espaces de Besov ont été introduits par le mathématicien russe Oleg Vladimirovich Besov : http ://www.mi.ras.ru/ besov/

2.2 Les espaces de Hardy

Notation. Dans ce qui suit, on désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe :

$$\mathbb{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < 1 \right\}$$

de frontière le cercle unité :

$$\mathbb{T} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\}$$

et par $\mathcal{H}ol\,(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

Pour toute fonction f de $\mathcal{S}_{\mathbb{D}}$, on désigne par $\tilde{f}$ la fonction, $2\,\pi-$périodique, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie, pour tout réel t, par :

$$\tilde{f}(t) = f(e^{i\,t})$$

On désigne par $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{T}$, à valeurs complexes, telles que $\tilde{f}$ soit intégrable, au sens de Lebesgue, sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$, on note $\hat{f}$ la fonction, de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, telle que, pour tout entier n :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\,t})\, e^{-i\,n\,t}\, dt$$

Propriété 2.2. *Etant donnée une fonction f holomorphe sur $\mathbb{D}$, alors, pour tout z de $\mathbb{D}$:*

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : \quad \hat{f}(n) = 0$$

et donc :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(n)\, z^n$$

Définition 2.3. Espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions f, holomorphes sur $\mathbb{D}$, telles que la série de terme général $|\hat{f}(n)|^2$ converge :

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol\,(\mathbb{D}) \,\middle|\, \sum_{n \in \mathbb{N}} |\hat{f}(n)|^2 < +\infty \right\}$$

Il peut aussi être défini comme l'ensemble des fonctions f de $L^2(\mathbb{T})$ telles que, pour tout entier négatif n :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : \quad \hat{f}(n) = 0$$

Exemple 2.1. La fonction qui, à tout z de $\mathbb{D}$, associe

$$\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, z^n}{n}$$

appartient à l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$.

Remarque 2.3. Les espaces de Hardy ont été introduits par le mathématicien hongrois Frigyes Riesz (1880-1956), l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. On ne pourra que rappeler que c'est lui qui démontra le théorème de Riesz-Fischer, le théorème de compacité et le théorème de représentation des formes linéaires qui portent son nom.

Théorème 2.3. *L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, muni de la norme*

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \mapsto \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Banach.

Mais, comme précédemment pour les espaces de Besov, il est possible de relier la norme de l'espace à une mesure, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

Définition 2.4. Fonction sous-harmonique
Etant donné un ouvert Ω du plan complexe $\mathbb{C}$, une fonction f, définie sur Ω, à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}$, est dite sous-harmonique si :

i. f est continue ;

ii. pour tout z_0 de $\mathbb{C}$, il existe un réel strictement positif r_0 tel que, pour tout réel $r < r_0$:

$$f(z_0) \leqslant \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} f(z_0 + e^{i\,t})\, dt$$

(propriété dite « de moyenne locale »)

Propriété 2.4. ***Une autre caractérisation de la norme de*** $H^2(\mathbb{D})$

Pour toute fonction f de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$:

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1^-} \left(\frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\,\pi} |f(r\, e^{i\,t})|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

3 Conclusion

Tout espace fonctionnel de Banach est-il un espace « mesuré » ? Même si nous avons réussi à exhiber des contre-exemples, il semble que tous les chemins ramènent à ces espaces ...

Thèse, anti-thèse, synthèse, voici un problème qui mériterait d'être creusé !

Références

[1] Colin Bennett, Robert Sharpley, Interpolation Operators, Academic Press Inc., Toronto, 1988.

[2] Jean-Yves Chemin, Hajer Bahouri, Raphaël Danchin, Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Springer, 2011.

[3] Peter L. Duren, Theory of H^p Spaces, Dover, 2000.